

Festverzinsliche Titel - Formeln

25. Februar 2011

1 Forward Induction

Berechnung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeiten in jeder Zeiteinheit fest (zustandsunabhängig)

$r_i(t)$: Kurzfristiger Zinssatz im Zustand i Upticks zur Zeitperiode t

$$b(0, t) = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{\Pi_i(t-1)}{1 + r_i(t-1)}$$

$$\Pi_i(t) = \Pi_i(t-1) * \frac{1 - q_i(t-1)}{1 + r_i(t-1)} + \Pi_{i-1}(t-1) * \frac{q_{i-1}(t-1)}{1 + r_{i-1}(t-1)}$$

$$\Pi_0(0) = 1$$

2 Ho-Lee

1. Störfunktion berechnen

$$h(0) = h^*(0) = 1$$

$$h(t) = \frac{1}{q + (1 - q) * \delta^t}$$

$$h^*(t) = \delta^t * h(t)$$

2. Zeitstetige Diskontfaktoren berechnen

$b(0,1)$ bis $b(0,T)$ mit $b(0, t) = e^{-t*y(0,t)}$

3. Terminpreise berechnen

$F(0,1,2)$ bis $F(0,1,T)$ mit $F(0, t, t+1) = \frac{b(0,t+1)}{b(0,t)}$

4. Schocken + Bondpreise ausrechnen

$$b^{i+1}(t+1, T) = F^i(t, t+1, T) * h(T - (t+1))$$

$$b^i(t+1, T) = F^i(t, t+1, T) * h^*(T - (t+1))$$

3 Black-Derman-Toy

Annahme: Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten = $\frac{1}{2}$

$$\sigma(t+1) = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{r_i(t)}{r_{i-1}(t)}\right)$$
$$\Rightarrow r_i(t) = r_{i-1}(t) * e^{2\sigma(t+1)}$$

Aufsteigend NKAs berechnen.

4 Fundamentale Bewertungsgleichung

4.1 Dynamik des Zinssatzes

Gegeben ist die Dynamik des Zinssatzes, z.B.

$$dr_t = \underbrace{\kappa(\gamma - r_t)}_{\mu_t} dt + \underbrace{\sigma\sqrt{r_t}}_{\sigma_t} dW_t \quad \text{CIR Prozess}$$

4.2 Dynamik von $b(r, t, T)$

Nach Lemma von Ito ergibt sich:

$$db(r, t, T) = \underbrace{\left(b_t + \mu_t b_r + \frac{1}{2}\sigma_t^2 b_{rr}\right)}_{\mu_b b} dt + \underbrace{\sigma_t b_r}_{\sigma_b b} dW_t$$

mit Nebenbedingung $b(r, T, T) = 1$

4.3 Portfolio Bildung

Bilde lokal risikoloses Portfolio aus NKAs:

$$b_1 = b(r, t, T_1)$$
$$b_2 = b(r, t, T_2)$$
$$\text{(PF)} \quad \pi = \theta_1 b_1 + \theta_2 b_2$$

Dynamik von Portfolio:

$$d\pi = \theta_1 db_1 + \theta_2 db_2$$
$$= (\theta_1 \mu_1 b_1 + \theta_2 \mu_2 b_2) dt + (\theta_1 \sigma_1 b_1 + \theta_2 \sigma_2 b_2) dW_t$$

Es soll nun θ_1 und θ_2 so gewählt werden dass gilt:

$$\theta_1\sigma_1b_1 + \theta_2\sigma_2b_2 \stackrel{!}{=} 0$$

⇒ Volatilität des PF ist Null

$$\theta_1\mu_1b_1 + \theta_2\mu_2b_2 \stackrel{!}{=} r\pi$$

⇒ Drift entspricht dem risikolosen Zins

Daraus folgt

$$\lambda = \frac{\mu_b b - r b}{\sigma_b b}$$

und alles einsetzen ergibt fundamentale Bewertungsgleichung:

$$b_t + \mu_t b_r + \frac{1}{2}\sigma_t^2 b_{rr} - \lambda\sigma_t b_r = r b$$

5 Sonstiges

$$\text{Varianz} = \text{Wahrscheinlichkeit}_i * (X_i - \text{Durchschnitt}(X))^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Varianz}(x)}$$

Im zeitstetigen:

$$b(0, t) = e^{-t*y(0,t)}$$

$$y(0, t) = -\frac{\ln b(0, t)}{t}$$

$$y(t, t + 1) = -\ln b(t, t + 1) \quad \text{Short Rate in } t$$